数理解析研究所講究録
534巻 1984年 173-184

準マトロイドについて

早大 理工 井上 正之(Masayuki Inoue)
小野沢 晃(Akira Onozawa)

1. はじめに

1935年に Whitney が線形独立・従属の概念の抽象化として最初に考え出した"マトロイド"なる概念は、1970年の Edmonds のポリマトロイドを経て、1980年以降の冨澤による超空間論へ一般化され、現在に至っている。[1]

準マトロイドは、1980年に冨澤によって初めて提起された概念で、[2] マトロイドとポリマトロイドの中間に属するものとして位置づけられる。準マトロイドは、"端点定理"[2] からわかるように、超空間論における最も基本的な構成要素であり、その研究は重要な課題の一つである。現在までに、いくつかの研究が行われ、準マトロイドの組合せ的性質などが少しずつ明らかになってきているが、研究の余地はまだ多い。[3]~[5]

本報告では、準マトロイドの性質について述べる。

2. 準備[2]

非空な有限集合Eに対し、 そのべき集合2^E上で定義される実数値関数

$$\sigma : 2^E \longmapsto \mathbb{R} \tag{2.1}$$

を考える。 まず、 σの(1階)微分を、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial i}(S) = \sigma(S \cup \{i\}) - \sigma(S) \quad (i \in E,\ S \subseteq E - \{i\}) \tag{2.2}$$

によって定義する。 2階以上の微分は帰納的に、

$$\frac{\partial \sigma}{\partial I}(S) = \frac{\partial}{\partial i}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial (I - \{i\})}(S)\right) = \frac{\partial \cdots \partial \sigma}{\partial i_0 \cdots \partial i_p}(S) \quad (I = \{i_0, i_1, \cdots, i_p\} \subseteq E - S) \tag{2.3}$$

として定義できる。 簡単のため、 $\sigma_I(S) \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial I}(S)$ と表し、 特に2階微分の場合、 $I = \{i, j\}$ として、

$$\sigma_{ij}(S) = \sigma(S \cup \{i, j\}) - \sigma(S \cup \{i\}) - \sigma(S \cup \{j\}) + \sigma(S) \quad (S \subseteq E - \{i, j\}) \tag{2.4}$$

と書ける。 この時、

『$\sigma_{ij}(S) \geq 0 \quad (\forall \{i, j\} \subseteq E,\ i \neq j,\ \forall S \subseteq E - \{i, j\}) \quad (2.5)$

$\Leftrightarrow \sigma(X) + \sigma(Y) \leq \sigma(X \cup Y) + \sigma(X \cap Y) \quad (\forall X, Y \subseteq E) \quad (2.6)$』

である。 (2.5)又は(2.6)を満たすσは、 優モジュラー関数と呼ばれる。

さらに、 集合関数σに対し、 その Möbius の反転関数τは、

$$\tau(T) = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|T - S|} \sigma(S) \quad (T \subseteq E) \tag{2.7}$$

のように表わせ、

$$\sigma(S) = \sum_{T \subseteq S} \tau(T) \qquad (2.8)$$

なる関係があることが良く知られている。 ここで、 次の様な集合関数 μ^T を導入する。

$$\mu^T(S) = \begin{cases} 1 & (T \subseteq S \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} T \subseteq E,\ S \subseteq E \\ T\text{は固定} \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

これは優モジュラー関数であり、 単位優モジュラー関数と呼ばれる。 これを用いると、(2.8)式は、

$$\sigma(S) = \sum_{T \subseteq E} \tau(T) \mu^T(S) \qquad (2.10)$$

と書ける。

3. 準マトロイド

Eを有限集合とする時、 2^E 上の集合関数 $\sigma : 2^E \longrightarrow \mathbb{R}$ が優モジュラー関数であるならば、 Eとσの対を、 $\mathcal{M} = (E, \sigma)$ と表わし、 これをハイパーマトロイドと呼ぶ。 また、 σは不足度関数と呼ばれる。 ハイパーマトロイド $\mathcal{M}$ において、 その不足度関数σが、

$$\sigma(\phi) = 0, \qquad (3.1)$$

$$\sigma(\{i\}) \geq 0 \qquad (\forall i \in E) \qquad (3.2)$$

を満たすならば、 $\mathcal{M}$ はポリマトロイドとなる。 特に、ポリマトロイド$\mathcal{M}$ の不足度関数 σ が常に整数値をとるならば、 $\mathcal{M}$ は整ポリマトロイドと呼ばれる。 次に、 整

ポリマトロイド $\mathfrak{M}=(E,\sigma)$ において、

$$\sigma_{ij}(S)=1,\ 0 \quad (\forall\{i,j\}\subseteq E,\ i\neq j,\ \forall S\subseteq E-\{i,j\}) \qquad (3.3)$$

が成立する時、$\mathfrak{M}$ は準マトロイドと呼ばれる。さらに、準マトロイド $\mathfrak{M}$ の不足度関数 σ が、

$$\sigma_i(S)=1,\ 0 \quad (\forall i\in E,\ S\subseteq E-\{i\}) \qquad (3.4)$$

を満たす時、$\mathfrak{M}$ はマトロイドとなる。

以上に述べたことから、準マトロイドがマトロイドとポリマトロイドとの中間に属する概念であることがわかる。そして、準マトロイドについて次の重要な定理が成立する。

定理3.1（端点定理）.[2]

『i) 任意のポリマトロイドの不足度関数は、初等的準マトロイドの不足度関数の非負一次結合で表わせる。

ii) 任意のハイパーマトロイドの不足度関数は、初等的準マトロイドの不足度関数の一次結合で表わせる。』

この定理により、準マトロイドが、超空間論において最も基本的な構成要素となっていることがわかる。

4. 集合の被覆について

まず、有限集合Eの"被覆（covering）"の定義を行う。

定義4.1.[7]

『有限集合Eの部分集合をいくつか含む族を π とする。ここで、π に属するすべての集合の和集合が、もとの全

体集合Eに等しい時、 πを集合Eの被覆という。』

集合Eの被覆πの元を、 ブロックと呼ぶ。

$$\pi = \{B_1, B_2, \cdots, B_b\} \ (\phi \neq B_i \subseteq E, i=1,2,\cdots,b) \quad (4.1)$$

とすれば、

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_b = E \quad (4.2)$$

である。 集合Eを被覆する方法はさまざまであって、 以下に、 その例を示す。

定義4.2.[7]

『 集合Eの被覆πが、 次の条件(i),(ii)を満足するとき、 πを集合Eのn-分割である、と言う。

(i) πのすべての要素は、 少くとも、 Eのn個の要素を含む。

(ii) Eのすべてのn元部分集合(Eの部分集合で、 その要素数がちょうどnであるもの)は、 πの唯一つの要素に含まれる。』

n-分割の例としては、次に示す射影幾何がある。(この場合、 $n=2$、 すなわち2-分割となっている。)

定義4.3.

『 非空有限集合Pの部分集合族$\mathcal{L}$が、 次の(i)〜(iii)を満足するとき、 対(P, $\mathcal{L}$)は射影幾何と呼ばれる。

また、 Pの元を点、 $\mathcal{L}$の元を直線とそれぞれ呼ぶ。

(i) $x \neq y$, $x, y \in P$ ならば、 $x, y \in L \in \mathcal{L}$ となるような$\mathcal{L}$の元が唯一つ存在する。(このようなLを、$x \vee y$ とあらわす。)

(ii) $L \in \mathcal{L} \Rightarrow |L| \geq 3$.

(iii) $x \notin y \vee z$, $x^* \in y \vee z$, $y^* \in z \vee x$

$\Rightarrow {}^\exists z^* \in x \vee y : z^* \in x^* \vee y^*$」

この場合、 PがEに、 $\mathcal{L}$の元(直線)がπのブロックにそれぞれ対応している。

次に示すBIBDも、 集合の被覆と見なせる。

<u>定義4.4.</u>

「 Eの部分集合族$\pi = \{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$が、 次の条件を満足する時、 πは BIBD と呼ばれる。

(i) すべてのブロックB_i $(i = 1, 2, \cdots, b)$ は、 同一の要素数を持つ、 すなわち、

$$|B_i| = k \quad (i = 1, 2, \cdots, b)$$

(ii) iをEの要素とする。 すると、 iは、 丁度r個のブロックに含まれる。

(iii) i, j を、 互いに素なEの要素とする。 すると、$\{i, j\}$ は丁度λ個のブロックに含まれる。

このようなBIBDを、 $D = D(b, v, r, k, \lambda)$ であらわし、 ($|E| = v$とする) 5個の整数 b, v, r, k, λ

をBIBDのパラメータと呼ぶ。』

上の定義において、$\lambda=1$ ならば、BIBDは2-分割になっている。

また、点集合E，枝集合Uを持つ単純無向グラフについても、枝によって点集合Eを被覆していると考えることができる。

5．集合の被覆と準マトロイド

まず、集合の被覆と整ポリマトロイドとの関係について述べる。

$$\pi=\{B_1, B_2, \cdots, B_b\} \quad (\phi \neq B_i \subseteq E,\ i=1,2,\cdots,b) \qquad (5.1)$$

なる集合Eの被覆πを考える。2^E 上の集合関数をσとすると、(2.10)式から、

$$\sigma(S)=\sum_{T\subseteq E}\tau(T)\mu^T(S) \qquad (S\subseteq E)$$

と書ける。ここで、

$$\tau(T)=\begin{cases} 1 & (T={}^{\exists}B_i\in\pi) \\ 0 & (T\neq{}^{\forall}B_i\in\pi) \end{cases} \qquad (5.2)$$

とすれば、

$$\sigma(S)=\sum_{B_i\in\pi}\mu^{B_i}(S) \qquad (S\subseteq E) \qquad (5.3)$$

となる。この時、次の定理が成り立つ。

定理5.1

『(5.1)式に示したような集合Eの被覆πに対して、

(5.3)式のように定義される関数は、整ポリマトロイドの不足度関数となる。』

証明．(5.3)式の関数σが、(2.5)、(3.1)、(3.2)の各式を満たしていること、及び、整数値関数であること、を示せばよい。これは、(5.1)式、単位優モジュラー関数μ^Tの定義と性質、等を考慮すればあきらかに成立する。$\boxed{\diagup}$

次に、集合の被覆が準マトロイドになるための条件を考える。(2.4)式の右辺に、(2.10)式を代入して計算すると、

$$\sigma_{ij}(S) = \sum_{\{i,j\} \subseteq T \subseteq S \cup \{i,j\}} \tau(T) \qquad (5.4)$$

を得る。従って、集合の被覆が準マトロイドになるためには、(3.3)式から、

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq T \subseteq S \cup \{i,j\}} \tau(T) = 1, 0 \quad (\forall\{i,j\} \subseteq E, i \neq j, \forall S \subseteq E - \{i,j\}) \qquad (5.5)$$

となれば良い。このためには、(5.2)式から、

$$\{i,j\} \subseteq T \subseteq S \cup \{i,j\} \quad (\forall\{i,j\} \subseteq E, i \neq j, \forall S \subseteq E - \{i,j\}) \qquad (5.6)$$

を満足する集合$T \subseteq E$の中で、$\tau(T) = 1$となるものが高々1つしかないようにすれば良い。すなわち、(5.6)式を満足する集合Tで、集合Eの被覆πのブロックになっているものが高々1つしか存在しなければ良い。ところで、(5.6)式を満たす集合Tは、Eの2元部分集合$\{i,j\}$を

つねに含んでいる。 従って、 Eのすべての2元部分集合が、 それぞれ、 Eの被覆πのブロックのうち、 高々1つのブロックにのみ含まれるようにしてやれば、 (5.5)式が成立し、 集合Eの被覆πが、 (5.3) 式で定義される関数を不足度関数として持つ準マトロイドになることがわかる。

6. 準マトロイドのある1つのクラス.

本節では、 現在までに知られている準マトロイドの例がほとんで. ある1つのクラスに属していることを述べる。

E上の準マトロイド$\mathfrak{M}$に対し、 その不足関数δは、Möbius の反転関数τを用いて、 (2.10) 式の形に書け、その2階微分が(5.5)式のように表わされる。 τは、一般に正負いずれの値でもとりうるが、 ここで

$$\tau(T) \geq 0 \qquad (\forall T \subseteq E) \tag{6.1}$$

となっているものとする。 この時、 (5.5)式が成立していることから、 Eのすべての2元部分集合$\{i,j\}$に対し、

$$\{i,j\} \subseteq T \subseteq E \tag{6.2}$$

を満足する集合Tの中で、 $\tau(T)=1$となるものが高々1つだけで、 他はすべて$\tau(T)=0$となっていることがわかる。 これは、 $\tau(T)=1$となる集合Tを被覆πのブロックとみなせば、 前節で述べた.被覆πが準マトロイドになるための条件と同じことである。 ところで、 (6.1)式の成

立する準マトロイドにおいて$\tau(T)=1$となるような集合Tのすべての和集合は、一般には全体集合Eと一致しない、すなわち集合Eの被覆にはならない。しかし、$\tau(T)=1$となる集合Tのすべての和集合をE_Tとおくと、$\tau(T)=1$となる集合Tの族はE_Tの被覆で、準マトロイドになる。また、全体集合Eの中で、E_Tに含まれない部分は、不足度関数σのモジュラー成分に対応しており、準マトロイド$\mathfrak{M}$の本質的部分（E_Tに対応し、集合の被覆で表現できる部分）には全く影響を与えないことは、文献[6]の優モジュラー関数の分解定理からほぼ自明である。

以上の議論から、(6.1)式の成立する準マトロイドを、集合の被覆によって表現できる準マトロイドと呼び、その表現を、

$$\left\{\begin{array}{ll} \pi_T=\{T_i \mid \tau(T_i)=1,\ i=1,2,\cdots,l\} & (6.3) \\ E_T=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_l\quad (T_i\in\pi_T,\ i=1,2,\cdots,l) & (6.4) \end{array}\right.$$

によって与えることにする。このように、集合の被覆として表現できる準マトロイドのクラスがあることがわかる。例えば、4節の定義4.2において、$n=2$、すなわち2-分割を考えると、定義4.2の条件(ii)から、これが準マトロイドであり[1]しかも集合の被覆として表現できるクラスに属していることはあきらかである。従って、2

一分割の例である射影幾何、 BIBD（但し、 λ＝1）なども、 このクラスに属する準マトロイドである。 また、点集合E、 枝集合Uを持つ単純無向グラフは、

$$\sigma(S) = \sum_{\{i,j\} \in U} \mu^{\{i,j\}}(S) \tag{6.5}$$

を不足度関数に持つ準マトロイドで、 グラフ的準マトロイドと呼ばれるが、[4] これもやはり集合の被覆として表現できる準マトロイドである。 このように、 現在までに知られている準マトロイドのほとんどは、 集合の被覆として表現できるクラスに属していることがわかる。

7. おわりに.

以上で、 準マトロイドと集合の被覆という組合せ的構造との関連を中心に述べた。 集合の被覆で表現できない準マトロイドについて調べることが、今後に残された課題の1つである。

謝辞：日頃、筆者等が御指導・御鞭撻頂く本学堀内和夫教授・大石進一助教授に深く感謝致します。また、平生、有益な御助言を頂く新潟大学冨澤信明教授に感謝致します。

参考文献

〔1〕冨澤：ヘドロン空間の理論と応用；数解研講究録 471, PP. 183～229（1982）.

〔2〕冨澤：超空間論（II）区間の幾何学と高階優モジュラー関

数；電子通信学会技術研究報告、CAS80-73，pp.31～40 (1980).
〔3〕冨澤：超空間論(VII)準マトロイドとそのグラフ的表現について；同上，CAS80-106，pp.17～24 (1980).
〔4〕冨澤：超空間論(XI)グラフ的準マトロイドとそのグラフの向き付けへの応用；同上，CAS81-93，pp.55～62 (1981).
〔5〕柴崎、松藤、平山：準マトロイドの分類とテーブル；同上、CAS82-1，pp.1～8 (1982)。
〔6〕冨澤：超空間論(I)優モジュラー関数と基の概念の一般化；同上、CAS80-72，pp.23～30 (1980).
〔7〕H.H. Crapo and G.C. Rota: On the Foundations of Combinatorial Theory, Combinatorial Geometries; M.I.T. Press, Cambridge, Mass. (1970).